อนุพันธ์ บทที่ 2

Derivatives

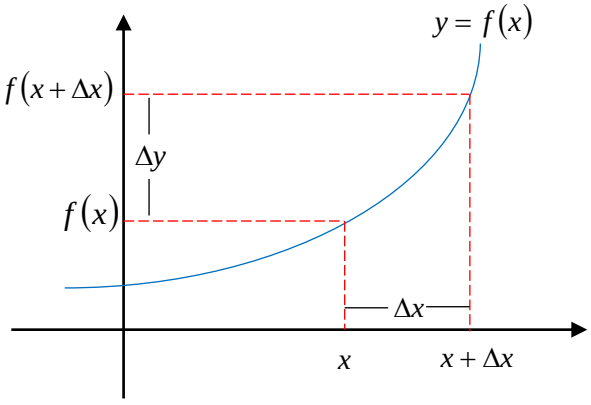
อนุพันธ์เป็นหัวข้อเกี่ยวกับอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน โดยทั่วไปทุกอย่างจะมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นอยู่เสมอ และมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นเครื่องมือหลักในกระบวนการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่าง ๆ

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. เข้าใจบทนิยามของอนุพันธ์
2. สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้
3. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้อง

2.1 บทนิยามของอนุพันธ์ (Definition of derivative)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.1 กราฟของอนุพันธ์

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

จากรูป Δx คือ ส่วนที่เปลี่ยนของค่า x ทางแกน x จากค่า x ไปเป็น $x+\Delta x$

Δy คือ ส่วนที่เปลี่ยนของค่า y ทางแกน y จากค่า $f(x)$ ไปเป็น $f(x+\Delta x)$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

โดยส่วนที่เปลี่ยนของ x หรือ แกน y เรียกว่าค่าเพิ่ม (Increment) ซึ่งอาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ คือ อัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f เมื่อ Δx เข้าใกล้ 0 แล้วอนุพันธ์ของ f เทียบกับ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

$\frac{dy}{dx}, y', f'(x)$ และอนุพันธ์ของ f ที่จุด $x=a$ เขียนแทนด้วย $f'(a)$ หรือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

กำหนดนิยามดังนี้ ถ้า $y=f(x)$ แล้ว $f'(x)$ หาได้จาก

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

ถ้า $f'(x)$ หาค่าได้แล้วจะเรียก $f(x)$ ว่าฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ (Differentiable function)

ตัวอย่าง 2.1 กำหนดให้ $y=x^2+1$ ถ้า $x=3$ และ $\Delta x=2$ จงหา Δy

<u>วิธีทำ</u> จาก

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x) \\ &= f(3+2)-f(2) \\ &= f(5)-f(2) \\ &= (5^2+1)-(2^2+1) \\ &= (25+1)-(4+1) \\ &= 26-5 \\ &= 21 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.2 ในการระเหยของสารเคมีชนิดหนึ่ง พบว่าเมื่อเวลาผ่านไป x นาที การระเหยของสารเคมีเท่ากับ x^2+x+1 มิลลิลิตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยต่อนาทีของการระเหยของสารเมื่อเทียบกับเวลาในช่วงเวลา 1 ถึง 4 นาที ในการระเหย

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้การระเหยของสารเคมี คือ $y=x^2+x+1$

ณ จุดเริ่มต้นในเวลา $x=1$ จะได้ $\Delta x = 4-1=3$ และ $x+\Delta x = 4$

จาก
$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)\\ &= f(4)-f(1)\\ &= (4^2+4+1)-(1^2+1+1)\\ &= (16+4+1)-(1+1+1)\\ &= 21-3\\ &= 18 \quad \text{(คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของการระเหยใน 3 นาที)}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18}{3} = 6$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยต่อนาที มีค่าเท่ากับ 6 มิลลิลิตรต่อนาที

ตัวอย่าง 2.3 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=x^2+1$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม
$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left((x+\Delta x)^2\right)+1-(x^2+1)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2+1-x^2-1}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 2x+\Delta x\\ &= 2x+0 = 2x\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.4 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\sqrt{2-3x}$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2-3(x+\Delta x)}-\sqrt{2-3x}}{\Delta x}$$

แก้ปัญหาโจทย์โดยวิธีการคูณสังยุคทั้งเศษและส่วน

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2-3(x+\Delta x)}-\sqrt{2-3x}}{\Delta x}\times\frac{\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}}{\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2-3(x+\Delta x)}\right)^2-\left(\sqrt{2-3x}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(2-3(x+\Delta x)\right)-\left(2-3x\right)}{\Delta x\left(\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{2}\cancel{-3x}-3\Delta x\cancel{-2}\cancel{+3x}}{\Delta x\left(\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3}{\sqrt{2-3(x+\Delta x)}+\sqrt{2-3x}}$$

$$=\frac{-3}{\sqrt{2-3(x+0)}+\sqrt{2-3x}}$$

$$=\frac{-3}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-3x}}$$

$$=\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$$

ตัวอย่าง 2.5 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{2-x}{x}$ จงหา $f'(-1)$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\dfrac{2-(x+\Delta x)}{x+\Delta x}\right)-\left(\dfrac{2-x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{2-(x+\Delta x)}{x+\Delta x}\right)-\left(\frac{2-x}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{2-x-\Delta x}{x+\Delta x}\right)+\left(\frac{x-2}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{2-x-\Delta x}{x+\Delta x}\right)\times\frac{x}{x}+\left(\frac{x-2}{x}\right)\times\frac{(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{(2-x-\Delta x)x+(x-2)(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\cancel{2x}-\cancel{x^2}-\cancel{x\Delta x}+\cancel{x^2}+\cancel{x\Delta x}-\cancel{2x}-2\Delta x}{x(x+\Delta x)}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\cancel{\Delta x}}\left[\frac{-2\cancel{\Delta x}}{x(x+\Delta x)}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-2}{x(x+\Delta x)}\right]$$

$$=\frac{-2}{x(x+0)}$$

$$=\frac{-2}{x(x)}=\frac{-2}{x^2}$$

ดังนั้น $f'(-1)=\dfrac{-2}{(-1)^2}=\dfrac{-2}{1}$

$$=-2$$

2.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต (Differentiation of algebraic functions)

ฟังก์ชันพีชคณิต คือ ฟังก์ชันที่นิยามเขียนอยู่ในรูปของการบวก ลบ คูณ หาร ของตัวแปรและตัวคงที่ โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของบางฟังก์ชันที่มีหลาย ๆ เทอมประกอบกันมาก ถ้าหาอนุพันธ์โดยใช้นิยามในรูปลิมิตนั้นมีขั้นตอนมาก ดังนั้น จึงได้มีการสร้างสูตรที่ใช้สำหรับหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต ขึ้นมาโดยอาศัยนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต ดังสูตรต่อไปนี้

- กำหนดให้ u,v เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้
  โดยที่ c คือ ค่าคงที่ใด ๆ และ n เป็นจำนวนจริง

1. $\dfrac{dc}{dx}=0$

2. $\dfrac{dx}{dx}=1$

3. $\dfrac{d}{dx}(cu)=c\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}(u\pm v)=\dfrac{du}{dx}\pm\dfrac{dv}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}(u\cdot v)=u\dfrac{dv}{dx}\pm v\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}\pm u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}=\dfrac{1}{v^2}\left[v\dfrac{du}{dx}\pm u\dfrac{dv}{dx}\right]$

7. $\dfrac{du^n}{dx}=nu^{n-1}\cdot\dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 2.6 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=5x^4+7x^3-9x^2+8$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(5x^4+7x^3-9x^2+8)$$ **<u>สูตรที่ 4</u>**

$$f'(x)=\frac{d(5x^4)}{dx}+\frac{d(7x^3)}{dx}-\frac{d(9x^2)}{dx}+\frac{d(8)}{dx}$$ **<u>สูตรที่ 1 และ 3</u>**

$$=5\frac{d(x^4)}{dx}+7\frac{d(x^3)}{dx}-9\frac{d(x^2)}{dx}+0$$ **<u>สูตรที่ 2 และ 7</u>**

$$=5(4)x^{4-1}\frac{dx}{dx}+7(3)x^{3-1}\frac{dx}{dx}-9(2)x^{2-1}\frac{dx}{dx}$$

$$=20x^3+21x^2-18x$$

ตัวอย่าง 2.7 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{5}{7}x^3-4$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{5}{7}x^3-4\right)$$ **<u>สูตรที่ 4</u>**

$$=\frac{d}{dx}\left(x^{-2}+\frac{5}{7}x^3-4\right)$$

$$=\frac{d(x^{-2})}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{7}x^3\right)-\frac{d(4)}{dx}$$ **<u>สูตรที่ 1 และ 3</u>**

$$=\frac{d(x^{-2})}{dx}+\frac{5}{7}\frac{d(x^3)}{dx}-0$$ **<u>สูตรที่ 2 และ 7</u>**

$$=-2x^{-2-1}\frac{dx}{dx}+\frac{5}{7}(3)x^{3-1}\frac{dx}{dx}$$ **<u>สูตรที่ 7</u>**

$$=-2x^{-3}+\frac{15}{7}x^2$$

ตัวอย่าง 2.8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}+3$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}+3)$$ **<u>สูตรที่ 4</u>**

$$f'(x)=\frac{d(x^{\frac{2}{3}})}{dx}-\frac{d(4x^{\frac{1}{2}})}{dx}+\frac{d(3)}{dx}$$

$$=\frac{d(x^{\frac{2}{3}})}{dx}-4\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}+0$$ **<u>สูตรที่ 1 และ 3</u>**

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}\frac{dx}{dx}-4\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}\frac{dx}{dx}$$ **<u>สูตรที่ 2 และ 7</u>**

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-\left(1\times\frac{3}{3}\right)}-\frac{4}{2}x^{\frac{1}{2}-\left(1\times\frac{2}{2}\right)}$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{2-3}{3}}-2x^{\frac{1-2}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}-2x^{\frac{-1}{2}}$$

ตัวอย่าง 2.9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=2x^5-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{4x^2}+5x$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(2x^5-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{4x^2}+5x)$$ **<u>สูตรที่ 4</u>**

$$=\frac{d(2x^5)}{dx}-\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^4}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4x^2}\right)+\frac{d(5x)}{dx}$$ **<u>สูตรที่ 1 และ 3</u>**

$$=2\frac{d(x^5)}{dx}-3\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right)+\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)+5\frac{dx}{dx}$$ **<u>สูตรที่ 1 และ 3</u>**

$$=2\frac{d(x^5)}{dx}-3\frac{d(x^{-4})}{dx}+\frac{1}{4}\frac{d(x^{-2})}{dx}+5$$ **<u>สูตรที่ 1 และ 3</u>**

$$=2(5)x^{5-1}\frac{dx}{dx}-3(-4)x^{-4-1}\frac{dx}{dx}+\frac{1}{4}(-2)x^{-2-1}\frac{dx}{dx}+5$$ **<u>สูตรที่ 2 และ 7</u>**

$$=10x^4+12x^{-5}-\frac{1}{2}x^{-3}+5$$

ตัวอย่าง 2.10 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=4x^{\frac{1}{2}}-9x^{\frac{2}{3}}+8x^{\frac{3}{4}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d(4x^{\frac{1}{2}}-9x^{\frac{2}{3}}+8x^{\frac{3}{4}})}{dx}$$

$$=\frac{d(4x^{\frac{1}{2}})}{dx}-\frac{d(9x^{\frac{2}{3}})}{dx}+\frac{d(8x^{\frac{3}{4}})}{dx}$$

$$=4\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}-9\frac{d(x^{\frac{2}{3}})}{dx}+8\frac{d(x^{\frac{3}{4}})}{dx}$$

$$=4\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}\frac{dx}{dx}-9\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1}\frac{dx}{dx}+8\left(\frac{3}{4}\right)x^{\frac{3}{4}-1}\frac{dx}{dx}$$

$$=2x^{\frac{1}{2}-\left(1\times\frac{2}{2}\right)}-\frac{18}{3}x^{\frac{2}{3}-\left(1\times\frac{3}{3}\right)}+6x^{\frac{3}{4}-\left(1\times\frac{4}{4}\right)}$$

$$=2x^{\frac{-1}{2}}-6x^{\frac{-1}{3}}+6x^{\frac{-1}{4}}$$

ตัวอย่าง 2.11 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{x}-12\sqrt[5]{x^3}+\frac{4}{\sqrt[9]{x^4}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}-12\sqrt[5]{x^3}+\frac{4}{\sqrt[9]{x^4}}\right)$$

$$=\frac{d(\sqrt{x})}{dx}-\frac{d(12x^{\frac{3}{5}})}{dx}+\frac{d(4x^{\frac{4}{9}})}{dx}$$

$$=\frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}-12\frac{d(x^{\frac{3}{5}})}{dx}+4\frac{d(x^{\frac{4}{9}})}{dx}$$

$$=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\frac{dx}{dx}-12\left(\frac{3}{5}\right)x^{\frac{3}{5}-1}\frac{dx}{dx}+4\left(\frac{4}{9}\right)x^{\frac{4}{9}-1}\frac{dx}{dx}$$

$$=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-\left(1\times\frac{2}{2}\right)}-\frac{36}{5}x^{\frac{3}{5}-\left(1\times\frac{5}{5}\right)}+\frac{16}{9}x^{\frac{4}{9}-\left(1\times\frac{9}{9}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}x^{\frac{1-2}{2}}-\frac{36}{5}x^{\frac{3-5}{5}}+\frac{16}{9}x^{\frac{4-9}{9}}$$

$$=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}-\frac{36}{5}x^{\frac{-2}{5}}+\frac{16}{9}x^{\frac{-5}{9}}$$

ตัวอย่าง 2.12 กำหนดให้ $y=(2x^3+1)^8$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=\frac{d}{dx}(2x^3+1)^8$$

กำหนดให้ $(2x^3+1)^8$ อยู่ในรูปแบบ u^n

$$=8(2x^3+1)^{8-1}\frac{d(2x^3+1)}{dx}$$

โดยที่ $u=(2x^3+1)$ และ $n=8$

$$=8(2x^3+1)^7\left(2(3)(x^{3-1})\frac{dx}{dx}\right)$$

$$=8(2x^3+1)^7(6x^2)$$

$$=48x^2(2x^3+1)^7$$

ตัวอย่าง 2.13 กำหนดให้ $y=(x^2-1)(-x^3+5x-2)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=\frac{d}{dx}(x^2-1)(-x^3+5x-2)$$

<u>สูตรที่ 5</u>

$$=(x^2-1)\frac{d}{dx}(-x^3+5x-2)+(-x^3+5x-2)\frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$=(x^2-1)(-3x^2+5)+(-x^3+5x-2)(2x)$$

ตัวอย่าง 2.14 กำหนดให้ $y=\dfrac{2x+5}{4-x}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=\frac{(4-x)\frac{d}{dx}(2x+5)-(2x+5)\frac{d}{dx}(4-x)}{(4-x)^2}$$

<u>สูตรที่ 6</u>

$$=\frac{(4-x)(2)-(2x+5)(-1)}{(4)^2-2(4)(x)+x^2}$$

$$=\frac{(8-2x)+(2x+5)}{16-8x+x^2}$$

$$=\frac{8-2x+2x+5}{x^2-8x+16}$$

$$=\frac{13}{x^2-8x+16}$$

ตัวอย่าง 2.15 กำหนดให้ $y=\sqrt[3]{x^2}(2x^2-1)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}(2x^2-1)\right)$$

$$=\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}(2x^2-1))$$

$$=x^{\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}(2x^2-1)+(2x^2-1)\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}})$$

$$=x^{\frac{2}{3}}(4x)+(2x^2-1)\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$=4x^{\frac{2}{3}}x+\frac{2}{3}(2x^2-1)x^{\frac{2}{3}-\left(1\times\frac{3}{3}\right)}$$

$$=4x^{\frac{2}{3}+1}+\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2-3}{3}}$$

$$=4x^{\frac{2}{3}+\left(1\times\frac{3}{3}\right)}+\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{3}\right)x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=4x^{\frac{2+3}{3}}+\frac{4}{3}x^{2-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=4x^{\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}x^{\left(2\times\frac{3}{3}\right)-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=4x^{\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}x^{\frac{6}{3}-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=4x^{\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=\left(4+\frac{4}{3}\right)x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=\left(\frac{12}{3}+\frac{4}{3}\right)x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$=\frac{16}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

ตัวอย่าง 2.16 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}$ จงหา $f'(2)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{x^2\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x^2-3})-\sqrt{x^2-3}\dfrac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$=\frac{x^2\dfrac{d}{dx}(x^2-3)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{x^2-3}\dfrac{d}{dx}(x^2)}{x^4}$$

$$=\frac{1}{x^4}\left(x^2\frac{1}{2}(x^2-3)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(x^2-3)-\sqrt{x^2-3}(2x)\right)$$

$$=\frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{2}x^2(x^2-3)^{\frac{1}{2}-\left(1\times\frac{2}{2}\right)}(2x)-2x\sqrt{x^2-3}\right)$$

$$=\frac{1}{x^4}\left(x^3(x^2-3)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}-2x\sqrt{x^2-3}\right)$$

$$=\frac{x^3(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}-2x\sqrt{x^2-3}}{x^4}$$

$$=\frac{x^3(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}}{x^4}-\frac{2x\sqrt{x^2-3}}{x^4}$$

$$=\frac{1}{x(x^2-3)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2\sqrt{x^2-3}}{x^3}$$

$$=\frac{1}{x\sqrt{x^2-3}}-2\frac{\sqrt{x^2-3}}{x^3}$$

$$\therefore\quad f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2^2-3}}-2\frac{\sqrt{2^2-3}}{2^3}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{4-3}}-2\frac{\sqrt{4-3}}{8}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1}}-\frac{\sqrt{1}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}\right)-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย (Differentiation of transcendental functions)

ฟังก์ชันอดิศัย ได้แก่ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential function) ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm function) ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric function) และฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse trigonometric function)

2.3.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม (Differentiation of exponential function and logarithm function)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม จำเป็นที่จะต้องทราบพื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

1) <u>ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง</u> โดยมีบทนิยามดังนี้

นิยาม ถ้าให้ a, x และ y คือ จำนวนจริงใด ๆ กำหนดฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x) = a^x$ เรียกว่าเลขยกกำลังโดยที่ a เป็นเลขฐาน และ x เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง โดยมีสมบัติฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ดังนี้

1. $a^x > 0$
2. $a^0 = 1$
3. $a^x a^y = a^{x+y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$
6. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad ; \; a^y \neq 0$
7. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} \quad ; \; a^x \neq 0$

โดยที่ e เป็นจำนวนอตรรกยะ $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ หรือ $e = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \approx 2.71828$ เรียกว่าตัวเลขของออยเลอร์ (Euler's number) ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x) = e^x$ เรียกว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังฐาน e

2) <u>ฟังก์ชันลอการิทึม</u> เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง โดยมีบทนิยามดังนี้

นิยาม ถ้ากำหนดฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูป $f(x)=\log_a x$ คือ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $f(x)=a^x$ โดยที่ $x>0$, $a>0$ และ $a\neq 1$ เรียก a เป็นเลขฐานของฟังก์ชัน และเรียก $\log_a x$ ว่าล็อค x ฐาน a โดยมีสมบัติฟังก์ชันลอการิทึมดังนี้

1. $\log_a 1=0$
2. $\log_a a=1$
3. $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
4. $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
5. $\log_a x^n=n\log_a x$ โดยที่ n คือจำนวนจริง
6. $\log_y x=\dfrac{\log_a x}{\log_a y}$
7. $a^{\log_a x}=x$
8. $\log^n x=(\log x)^n$

และ ln คือ log ฐาน e เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\log e$

ถ้ากำหนดให้ u, v เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ $u(x) > 0$, $a > 0$ และ $a \neq 1$

1. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

2. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$

3. $\frac{d}{dx} u^v = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$

4. $\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}$

5. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 2.17 กำหนดให้ $y = 8^{-3x^2}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}(8^{-3x^2})$$

$$= 8^{-3x^2} \ln 8 \frac{d(-3x^2)}{dx}$$

$$= 8^{-3x^2} \ln 8(-6x)$$

$$= -6x(\ln 8)8^{-3x^2}$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $a = 8$ และ $u = -3x^2$

ตัวอย่าง 2.18 กำหนดให้ $y = e^{x^2}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}(e^{x^2})$$

$$= e^{x^2} \frac{d(x^2)}{dx}$$

$$= e^{x^2}(2x)$$

$$= 2xe^{x^2}$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $u = x^2$

ตัวอย่าง 2.19 กำหนดให้ $y = e^{2x}3^{\sqrt{x}}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}(e^{2x}3^{\sqrt{x}})$$

$$= e^{2x}\frac{d}{dx}(3^{\sqrt{x}}) + 3^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(e^{2x})$$

$$= e^{2x}(3^{\sqrt{x}})\ln 3\frac{d\sqrt{x}}{dx} + 3^{\sqrt{x}}(e^{2x})\frac{d}{dx}(2x)$$

$$= e^{2x}(3^{\sqrt{x}})\ln 3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 3^{\sqrt{x}}(e^{2x})(2)$$

$$= \frac{e^{2x}(3^{\sqrt{x}})\ln 3}{2\sqrt{x}} + 2e^{2x}(3^{\sqrt{x}})$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $a = 3$ และ $u = \sqrt{x}$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $u = 2x$

ตัวอย่าง 2.20 กำหนดให้ $y = \log_5(2x^3 - 4)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\log_5(2x^3 - 4)\right)$$

$$= \frac{1}{2x^3 - 4}\log_5 e\frac{d(2x^3 - 4)}{dx}$$

$$= \frac{1}{2x^3 - 4}\log_5 e(6x^2)$$

$$= \frac{6x^2\log_5 e}{2x^3 - 4}$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u}\log_a e\frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $a = 5$ และ $u = 2x^3 - 4$

ตัวอย่าง 2.21 กำหนดให้ $y = \ln(5 - x^3)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\ln(5 - x^3)\right)$$

$$= \frac{1}{5 - x^3}\frac{d(5 - x^3)}{dx}$$

$$= \frac{1}{5 - x^3}(-3x^2) = \frac{-3x^2}{5 - x^3}$$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

กำหนดให้ $u = 5 - x^3$

ตัวอย่าง 2.22 กำหนดให้ $y=\dfrac{e^{2x}}{\ln x}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{\ln x}\right)$$

$$=\frac{(\ln x)\dfrac{d}{dx}(e^{2x})-e^{2x}\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{(\ln x)^2}$$

ใช้สูตร $\dfrac{d}{dx}e^u=e^u\dfrac{du}{dx}$

กำหนดให้ $u=2x$

$$=\frac{1}{(\ln x)^2}\left[(\ln x)\frac{d}{dx}(e^{2x})-e^{2x}\frac{d}{dx}(\ln x)\right]$$

ใช้สูตร $\dfrac{d}{dx}\ln u=\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

กำหนดให้ $u=x$

$$=\frac{1}{\ln^2 x}\left[(\ln x)(e^{2x})\frac{d(2x)}{dx}-(e^{2x})\frac{1}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{\ln^2 x}\left[(\ln x)e^{2x}(2)-\frac{e^{2x}}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{\ln^2 x}\left[2e^{2x}\ln x-\frac{e^{2x}}{x}\right]$$

ตัวอย่าง 2.23 กำหนดให้ $y=x^2\ln 3x$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y'=\frac{d}{dx}\left(x^2\ln 3x\right)$$

$$=x^2\frac{d}{dx}(\ln 3x)+(\ln 3x)\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$=x^2\left(\frac{1}{3x}\right)\frac{d(3x)}{dx}+(\ln 3x)(2x)$$

$$=x^2\left(\frac{1}{3x}\right)(3)+2x\ln 3x$$

$$=x+2x\ln 3x$$

ตัวอย่าง 2.24 กำหนดให้ $y = \ln^4(x^3 - 2)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\ln^4(x^3-2)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\ln(x^3-2)\right)^4$$

$$= 4\left(\ln(x^3-2)\right)^3 \frac{d\left(\ln(x^3-2)\right)}{dx}$$

$$= 4\ln^3(x^3-2)\frac{1}{(x^3-2)}\frac{d(x^3-2)}{dx}$$

$$= 4\ln^3(x^3-2)\frac{1}{x^3-2}\left(3x^2\right)$$

$$= \frac{12x^2\ln^3(x^3-2)}{x^3-2}$$

ตัวอย่าง 2.25 กำหนดให้ $y = \log\frac{5-x^2}{x(x^2+4)^3}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\log\frac{5-x^2}{x(x^2+4)^3}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\log(5-x^2) - \log x - \log(x^2+4)^3\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\log(5-x^2) - \log x - 3\log(x^2+4)\right)$$

$$= \frac{d(\log(5-x^2))}{dx} - \frac{d(\log x)}{dx} - 3\frac{d(\log(x^2+4))}{dx}$$

$$= \frac{1}{5-x^2}(\log e)\frac{d(5-x^2)}{dx} - \frac{1}{x}\log e - \frac{3}{x^2+4}(\log e)\frac{d(x^2+4)}{dx}$$

$$= \frac{\log e}{5-x^2}(-2x) - \frac{\log e}{x} - \frac{3\log e}{x^2+4}(2x)$$

$$= -\frac{2x}{5-x^2} - \frac{\log e}{x} - \frac{6x\log e}{x^2+4}$$

ตัวอย่าง 2.26 กำหนดให้ $y = 9(e^{4^{x^2 \log 5x}})$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\left[9(e^{4^{x^2 \log 5x}})\right]$$

$$= 9\frac{d}{dx}(e^{4^{x^2 \log 5x}})$$

$$= 9(e^{4^{x^2 \log 5x}})\frac{d(4^{x^2 \log 5x})}{dx}$$

$$= 9(e^{4^{x^2 \log 5x}})4^{x^2 \log 5x}(\ln 4)\frac{d(x^2 \log 5x)}{dx}$$

$$= 9(e^{4^{x^2 \log 5x}})4^{x^2 \log 5x}\ln 4\left[x^2\frac{d(\log 5x)}{dx} + \log 5x\frac{d(x^2)}{dx}\right]$$

$$= 9(e^{4^{x^2 \log 5x}})4^{x^2 \log 5x}\ln 4\left[x^2\frac{1}{5x}\log e\frac{d(5x)}{dx} + \log 5x(2x)\right]$$

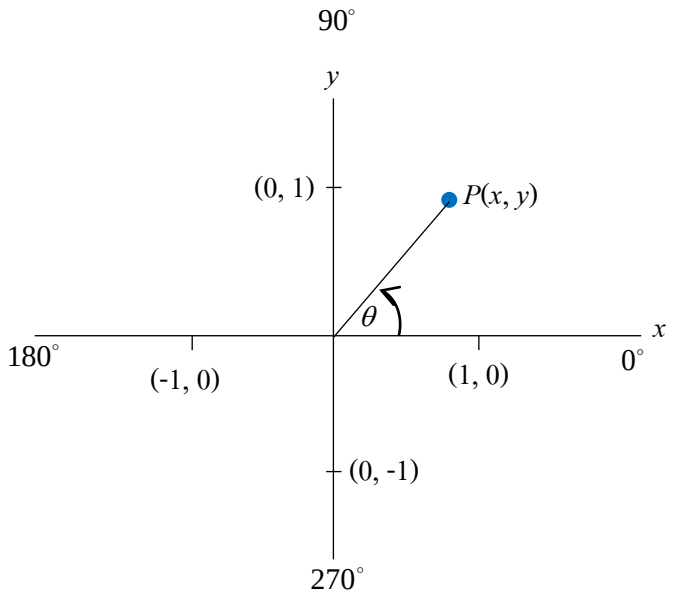
$$= 9(e^{4^{x^2 \log 5x}})4^{x^2 \log 5x}\ln 4\left[\frac{x^2 \log e}{5x}(5) + 2x\log 5x\right]$$

$$= 9(e^{4^{x^2 \log 5x}})4^{x^2 \log 5x}\ln 4\left[x\log e + 2x\log 5x\right]$$

2.3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Differentiation of trigonometric function)

มีบทนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เป็นพื้นฐาน ดังนี้

นิยาม ให้ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ กำหนด θ คือ การวัดของมุมในรูปหน่วยของเรเดียน (Radian) โดยเริ่มวัดจากแนวแกน x ที่เป็นบวก ณ จุด (1, 0) ไปยังจุด $P(x, y)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา $\theta \geq 0$ ดังรูป



รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์จตุภาคและตรีโกณมิติ

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

และ θ มีหน่วยเป็น เรเดียน ซึ่ง $\pi = 180^\circ$

จากรูป $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

โดยค่า $-1 \le x \le 1$ และ $-1 \le y \le 1$

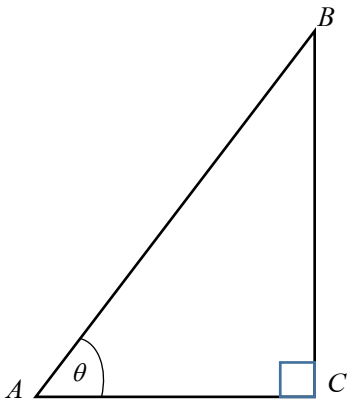
ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\sin\theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ด้านประชิดมุม } \theta} = \frac{BC}{AC}$$

หรือ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$



รูปที่ 2.3 ตรีโกณมิติกับสามเหลี่ยมมุมฉาก

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

แคลคูลัส 1

$\cos ec\theta$ คือ ส่วนกลับของ $\sin\theta$ หรือ $\cos ec\theta = \dfrac{AB}{BC}$

$\sec\theta$ คือ ส่วนกลับของ $\cos\theta$ หรือ $\sec\theta = \dfrac{AB}{AC}$

$\cot\theta$ คือ ส่วนกลับของ $\tan\theta$ หรือ $\tan\theta = \dfrac{AC}{BC}$

หรือ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติมุมพื้นฐาน

θ	0°	$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{\pi}{6}=60^\circ$	$\frac{\pi}{2}=90^\circ$	$\pi=180^\circ$	$\frac{3\pi}{2}=270^\circ$	$2\pi=360^\circ$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

สูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติเบื้องต้น

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \ , \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \ , \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha \ , \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha \ , \quad \tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \ , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \ , \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$$

ถ้ากำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้

1. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}\cot u = -\cos ec^2 u \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\cos ecu = -\cos ecu \cot u \frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 2.27 $y = \sin(x^2 - 3)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\sin(x^2 - 3)\right]$$

$$= \cos(x^2 - 3)\frac{d(x^2 - 3)}{dx}$$

$$= \cos(x^2 - 3)(2x)$$

$$= 2x\cos(x^2 - 3)$$

ตัวอย่าง 2.28 กำหนดให้ $y = \cos(e^{2x})$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left[\cos(e^{2x})\right] \\
&= -\sin(e^{2x})\frac{d(e^{2x})}{dx} \\
&= -\sin(e^{2x})\cdot e^{2x}\frac{d(2x)}{dx} \\
&= -e^{2x}\sin(e^{2x})(2) \\
&= -2e^{2x}\sin(e^{2x})
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 2.29 กำหนดให้ $y = \sqrt{\tan(\ln x)}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\tan(\ln x)}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\tan(\ln x)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan(\ln x)\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(\tan(\ln x)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan(\ln x)\right)^{\frac{1}{2}-\left(1\times\frac{2}{2}\right)}\sec^2(\ln x)\frac{d(\ln x)}{dx} \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan(\ln x)\right)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}\sec^2(\ln x)\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{2x}\left(\tan(\ln x)\right)^{\frac{1-2}{2}}\sec^2(\ln x) \\
&= \frac{1}{2x}\left(\tan(\ln x)\right)^{\frac{-1}{2}}\sec^2(\ln x) \\
&= \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\left(\tan(\ln x)\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\sec^2(\ln x) \\
&= \frac{\sec^2(\ln x)}{2x\left(\tan(\ln x)\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\sec^2(\ln x)}{2x\sqrt{\tan(\ln x)}}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 2.30 กำหนดให้ $y = (\sec 5x - \cot 5x)^3$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}(\sec 5x - \cot 5x)^3$$

$$= 3(\sec 5x - \cot 5x)^2 \frac{d(\sec 5x - \cot 5x)}{dx}$$

$$= 3(\sec 5x - \cot 5x)^2 \left(\sec 5x \tan 5x \frac{d(5x)}{dx} - \operatorname{cosec}^2 5x \frac{d(5x)}{dx} \right)$$

$$= 3(\sec 5x - \cot 5x)^2 \left(\sec 5x \tan 5x(5) - \operatorname{cosec}^2 5x(5)\right)$$

$$= 3(\sec 5x - \cot 5x)^2 \left(5\sec 5x \tan 5x - 5\operatorname{cosec}^2 5x\right)$$

$$= 3(\sec 5x - \cot 5x)^2 5\left(\sec 5x \tan 5x - \operatorname{cosec}^2 5x\right)$$

$$= 15(\sec 5x - \cot 5x)^2 \left(\sec 5x \tan 5x - \operatorname{cosec}^2 5x\right)$$

ตัวอย่าง 2.31 กำหนดให้ $y = \sin^4 \sqrt{3x}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}(\sin^4 \sqrt{3x})$$

$$= \frac{d}{dx}(\sin \sqrt{3x})^4$$

$$= 4(\sin \sqrt{3x})^{4-1} \frac{d(\sin \sqrt{3x})}{dx}$$

$$= 4(\sin \sqrt{3x})^3 \cos \sqrt{3x} \frac{d(\sqrt{3x})}{dx}$$

$$= 4\sin^3 \sqrt{3x} \cos \sqrt{3x} \frac{1}{2\sqrt{3x}} \frac{d(3x)}{dx}$$

$$= 2\sin^3 \sqrt{3x} \cos \sqrt{3x} \frac{1}{\sqrt{3x}} (3)$$

$$= 6\sin^3 \sqrt{3x} \cos \sqrt{3x} \frac{1}{\sqrt{3x}}$$

$$= \frac{6\sin^3 \sqrt{3x} \cos \sqrt{3x}}{\sqrt{3x}}$$

ตัวอย่าง 2.32 กำหนดให้ $y = 3^{\log x}\cos ec\sqrt{x}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}(3^{\log x}\cos ec\sqrt{x})$$

$$= 3^{\log x}\frac{d}{dx}(\cos ec\sqrt{x}) + \cos ec\sqrt{x}\frac{d}{dx}(3^{\log x})$$

$$= 3^{\log x}(-\cos ec\sqrt{x}\cot\sqrt{x})\frac{d(\sqrt{x})}{dx} + \cos ec\sqrt{x}(3^{\log x})\ln 3\frac{d(\log x)}{dx}$$

$$= -3^{\log x}\cos ec\sqrt{x}\cot\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3^{\log x}\ln 3(\cos ec\sqrt{x})\frac{1}{x}\log e$$

$$= -\frac{3^{\log x}\cos ec\sqrt{x}\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3^{\log x}\log e\ \ln 3\ \cos ec\sqrt{x}}{x}$$

ตัวอย่าง 2.33 กำหนดให้ $y = \tan\left(\frac{x}{4}\right)\cot\left(\frac{x}{4}\right)$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\tan\left(\frac{x}{4}\right)\cot\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan\left(\frac{x}{4}\right)\frac{d}{dx}\left[\cot\left(\frac{x}{4}\right)\right] + \cot\left(\frac{x}{4}\right)\frac{d}{dx}\left[\tan\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan\left(\frac{x}{4}\right)\left[-\cos ec^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4}\right) + \cot\left(\frac{x}{4}\right)\left[\sec^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$= -\left[\tan\left(\frac{x}{4}\right)\cos ec^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]\left(\frac{1}{4}\right) + \left[\cot\left(\frac{x}{4}\right)\sec^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\tan\left(\frac{x}{4}\right)\cos ec^2\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{4}\cot\left(\frac{x}{4}\right)\sec^2\left(\frac{x}{4}\right)$$

ตัวอย่าง 2.34 กำหนดให้ $y = \frac{(\cos x) - 1}{\sin x}$ จงหา y'

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{(\cos x) - 1}{\sin x}\right]$$

$$y' = \frac{\sin x \frac{d}{dx}\left((\cos x)-1\right)-\left((\cos x)-1\right)\frac{d}{dx}(\sin x)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x\left(-\sin x\right)-\left((\cos x)-1\right)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x-(\cos^2 x-\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x-\cos^2 x+\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= 1-\cot^2 x+\frac{\cos x}{\sin x}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= 1-\cot^2 x+\cot x\cos ecx$$

ตัวอย่าง 2.35 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x+\cos 2x}$ จงหา $f'(0)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin 4x}{\sin 2x+\cos 2x}\right]$$

$$= \frac{(\sin 2x+\cos 2x)\frac{d}{dx}(\sin 4x)-\left(\sin 4x\right)\frac{d}{dx}(\sin 2x+\cos 2x)}{(\sin 2x+\cos 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin 2x+\cos 2x)\cos 4x\frac{d(4x)}{dx}-\left(\sin 4x\right)\left(\cos 2x\frac{d(2x)}{dx}+(-\sin 2x)\frac{d(2x)}{dx}\right)}{(\sin 2x+\cos 2x)^2}$$

$$= \frac{(\sin 2x+\cos 2x)\cos 4x(4)-\left(\sin 4x\right)\left(\cos 2x(2)-\sin 2x(2)\right)}{(\sin 2x+\cos 2x)^2}$$

$$= \frac{4\cos 4x(\sin 2x+\cos 2x)-\left(\sin 4x\right)\left(2\cos 2x-2\sin 2x\right)}{(\sin 2x+\cos 2x)^2}$$

$$\therefore f'(0) = \frac{4\cos 4(0)(\sin 2(0)+\cos 2(0))-\left(\sin 4(0)\right)\left(2\cos 2(0)-2\sin 2(0)\right)}{(\sin 2(0)+\cos 2(0))^2}$$

$$f'(0)=\frac{4(\cos 0)(\sin 0+\cos 0)-(\sin 0)(2\cos 0-2\sin 0)}{(\sin 0+\cos 0)^2}$$

$$=\frac{4(1)(0+1)-(0)(2(1)-2(0))}{(0+1)^2}$$

$$=\frac{4(1)(1)-(0)(2)}{(1)^2}$$

$$=\frac{4-0}{1}=\frac{4}{1}=4$$

ตัวอย่าง 2.36 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{e^{\sin x}}{\cos x}$ จงหา $f'(0)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\sin x}}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{\cos x\dfrac{d}{dx}(e^{\sin x})-e^{\sin x}\dfrac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x(e^{\sin x})\dfrac{d(\sin x)}{dx}-e^{\sin x}(\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x(e^{\sin x})\cos x-e^{\sin x}(\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{(\cos x)^2e^{\sin x}-e^{\sin x}\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$\therefore\quad f'(0)=\frac{(\cos 0)^2\cdot e^{\sin 0}-e^{\sin 0}\sin 0}{(\cos 0)^2}$$

$$=\frac{(1)^2e^0-e^0(0)}{(1)^2}$$

$$=\frac{1(1)-1(0)}{(1)^2}$$

$$=\frac{1-0}{1}$$

$$=\frac{1}{1}=1$$

2.3.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Differentiation of inverse trigonometric function) มีบทนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เป็นพื้นฐาน ดังนี้

ถ้ากำหนดให้ $x = \sin y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y = \arcsin x$ หรือ $y = \sin^{-1} x$, $-1 \le x \le 1$ และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

ถ้ากำหนดให้ $x = \cos y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y = \arccos x$ หรือ $y = \cos^{-1} x$, $-1 \le x \le 1$ และ $0 \le y \le \pi$

ถ้ากำหนดให้ $x = \tan y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y = \arctan x$ หรือ $y = \tan^{-1} x$, $-1 \le x \le 1$ และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

ถ้ากำหนดให้ $x = \cot y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y = arc\cot x$ หรือ $y = \cot^{-1} x$, โดยที่ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $0 \le y \le \pi$

ถ้ากำหนดให้ $x = \sec y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y = arc\sec x$ หรือ $y = \sec^{-1} x$, $-\infty < x \le -1$, $1 \le x < \infty$ และ $-\pi \le y < -\frac{\pi}{2}$, $0 \le y < \frac{\pi}{2}$

ถ้ากำหนดให้ $x = \cos ec\, y$ ฟังก์ชันผกผันเขียนแทนด้วย $y = \arccos ec\, x$ หรือ $y = \cos ec^{-1} x$, $-\infty < x \le -1$, $1 \le x < \infty$ และ $-\pi < y \le -\frac{\pi}{2}$, $0 < y \le \frac{\pi}{2}$

ถ้ากำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้

1. $\frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}\cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}\cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\cos ec^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 2.37 กำหนดให้ $f(x)=\sin^{-1}(e^x)$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(e^x)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\frac{d(e^x)}{dx}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}(e^x)$$

$$=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

ตัวอย่าง 2.38 กำหนดให้ $f(x)=\cos^{-1}(\sin x^3)$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(\sin x^3)\right]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x^3)^2}}\frac{d(\sin x^3)}{dx}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x^3}}\cos x^3\frac{d(x^3)}{dx}$$

$$=-\frac{\cos x^3}{\sqrt{1-\sin^2 x^3}}(3x^2)$$

$$=-\frac{3x^2\cos x^3}{\sqrt{1-\sin^2 x^3}}$$

$$=-\frac{3x^2\cos x^3}{\sqrt{\cos^2 x^3}}$$

$$=-\frac{3x^2\cos x^3}{\cos^2 x^3}$$

$$=-3x^2$$

ตัวอย่าง 2.39 กำหนดให้ $f(x)=\ln(5^{\tan^{-1}(\log 2x)})$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\ln(5^{\tan^{-1}(\log 2x)})\right]$$

$$=\frac{1}{5^{\tan^{-1}(\log 2x)}}\frac{d(5^{\tan^{-1}(\log 2x)})}{dx}$$

$$=\frac{1}{5^{\tan^{-1}(\log 2x)}}(5^{\tan^{-1}(\log 2x)})\ln 5\frac{d(\tan^{-1}(\log 2x))}{dx}$$

$$=(\ln 5)\frac{d(\tan^{-1}(\log 2x))}{dx}$$

$$=(\ln 5)\frac{1}{1+(\log 2x)^2}\frac{d(\log 2x)}{dx}$$

$$=\frac{\ln 5}{1+\log^2 2x}\left(\frac{1}{2x}\right)\log e\frac{d(2x)}{dx}$$

$$=\frac{\ln 5}{(1+\log^2 2x)}\left(\frac{1}{2x}\right)\log e(2)$$

$$=\frac{\ln 5\log e}{x(1+\log^2 2x)}$$

$$=\frac{\ln 5\log e}{x+x\log^2 2x}$$

ตัวอย่าง 2.40 กำหนดให้ $f(x)=\tan^{-1}(\sin(\ln x))+\cot^{-1}(\sin(\ln x))$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(\sin(\ln x))+\cot^{-1}(\sin(\ln x))\right]$$

$$=\frac{1}{1+(\sin(\ln x))^2}\frac{d(\sin(\ln x))}{dx}-\frac{1}{1+(\sin(\ln x))^2}\frac{d(\sin(\ln x))}{dx}$$

$$=\frac{1}{1+\sin^2(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{d(\ln x)}{dx}-\frac{1}{1+\sin^2(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{d(\ln x)}{dx}$$

$$=\frac{\cos(\ln x)}{1+\sin^2(\ln x)}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\cos(\ln x)}{1+\sin^2(\ln x)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{\cos(\ln x)}{x(1+\sin^2(\ln x))}-\frac{\cos(\ln x)}{x(1+\sin^2(\ln x))}=0$$

ตัวอย่าง 2.41 กำหนดให้ $f(x)=e^{(\operatorname{cosec}^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(e^{(\operatorname{cosec}^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)})$$

$$=e^{(\operatorname{cosec}^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}\frac{d(\operatorname{cosec}^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}{dx}$$

$$=e^{(\operatorname{cosec}^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}\left(\operatorname{cosec}^{-1}2x\frac{d(\sec^{-1}2x)}{dx}+\sec^{-1}2x\frac{d(\operatorname{cosec}^{-1}2x)}{dx}\right)$$

$$=e^{(\operatorname{cosec}^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}\left((\operatorname{cosec}^{-1}2x)\frac{1}{(2x)\sqrt{(2x)^2-1}}\frac{d(2x)}{dx}+(\sec^{-1}2x)\frac{-1}{(2x)\sqrt{(2x)^2-1}}\frac{d(2x)}{dx}\right)$$

$$=e^{(\operatorname{cosec}^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}\left(\frac{\operatorname{cosec}^{-1}2x}{(2x)\sqrt{4x^2-1}}(2)-\frac{\sec^{-1}2x}{(2x)\sqrt{4x^2-1}}(2)\right)$$

$$=e^{(\operatorname{cosec}^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}\left(\frac{\operatorname{cosec}^{-1}2x}{x\sqrt{4x^2-1}}-\frac{\sec^{-1}2x}{x\sqrt{4x^2-1}}\right)$$

$$=\frac{e^{(\operatorname{cosec}^{-1}2x)(\sec^{-1}2x)}(\operatorname{cosec}^{-1}2x-\sec^{-1}2x)}{x\sqrt{4x^2-1}}$$

ตัวอย่าง 2.42 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{\cot^{-1}x}{e^x}$ จงหา $f'(1)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cot^{-1}x}{e^x}\right)$$

$$=\frac{e^x\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)-\cot^{-1}x\frac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)-\cot^{-1}x(e^x)}{e^{2x}}$$

$$=\frac{-\frac{e^x}{1+x^2}-e^x(\cot^{-1}x)}{e^{2x}}$$

$$\therefore \quad f'(1) = \frac{-\dfrac{e^1}{1+1^2} - e^1 \cot^{-1} 1}{e^{2(1)}}$$

$$f'(1) = \frac{-\dfrac{e}{2} - e\cot^{-1} 1}{e^2}$$

$$= -\frac{e}{2e^2} - \frac{e\cot^{-1} 1}{e^2}$$

$$= -\frac{1}{2e} - \frac{e\pi}{e^2}$$

$$= -\frac{1}{2e} - \frac{\pi}{e}$$

$$= -\frac{1}{2e} - \left(\frac{\pi}{e} \times \frac{2}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2e} - \frac{2\pi}{2e}$$

$$= \frac{-1-2\pi}{2e}$$

$$= \frac{-(1+2\pi)}{2e}$$

2.4 อนุพันธ์เชิงลอการิทึม (Logarithmic differentiation)

ถ้าการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่อยู่ในรูปผลคูณหรือผลหารมากกว่า 1 ฟังก์ชัน สามารถทำให้ง่ายขึ้นโดยใช้ลอการึทึม เพื่อลดความซับซ้อนในการหาอนุพันธ์โดยวิธีตรง โดยการนำลอการึทึมใส่เข้าไปทั้ง 2 ข้างของสมการในฟังก์ชันและใช้คุณสมบัติของลอการึทึมช่วยก่อนทำการหาอนุพันธ์

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

$$y\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\frac{d}{dx}(\ln y)$$

ตัวอย่าง 2.43 กำหนดให้ $y=(5-x^3)^4(x^4+6)^5$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> ใส่ ln ทั้ง 2 ข้างของสมการ และใช้คุณสมบัติเบื้องต้นของลอการิทึม

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(5-x^3)^4(x^4+6)^5\\ &= \ln(5-x^3)^4+\ln(x^4+6)^5\\ &= 4\ln(5-x^3)+5\ln(x^4+6)\end{aligned}$$

หาอนุพันธ์เทียบ x ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}\left(4\ln(5-x^3)+5\ln(x^4+6)\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(4\ln(5-x^3))+\frac{d}{dx}(5\ln(x^4+6))$$

$$=4\frac{d}{dx}(\ln(5-x^3))+5\frac{d}{dx}(\ln(x^4+6))$$

$$=4\frac{1}{(5-x^3)}\frac{d(5-x^3)}{dx}+5\frac{1}{(x^4+6)}\frac{d(x^4+6)}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{4}{(5-x^3)}(-3x^2)+\frac{5}{(x^4+6)}(4x^3)$$

$$=\frac{-12x^2}{(5-x^3)}+\frac{20x^3}{(x^4+6)}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=y\left(\frac{-12x^2}{(5-x^3)}+\frac{20x^3}{(x^4+6)}\right)$$

จากโจทย์ $y=(5-x^3)^4(x^4+6)^5$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=(5-x^3)^4(x^4+6)^5\left(\dfrac{-12x^2}{(5-x^3)}+\dfrac{20x^3}{(x^4+6)}\right)$

ตัวอย่าง 2.44 กำหนดให้ $y = \dfrac{e^x\sqrt{x}}{(2x-1)^3}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> ใส่ ln ทั้ง 2 ข้างของสมการ และใช้คุณสมบัติเบื้องต้นของลอการิทึม

$$\ln y = \ln \frac{e^x\sqrt{x}}{(2x-1)^3}$$

$$= \ln(e^x\sqrt{x}) - \ln(2x-1)^3$$

$$= \ln e^x + \ln\sqrt{x} - 3\ln(2x-1)$$

$$= x\ln e + \ln x^{\frac{1}{2}} - 3\ln(2x-1) \qquad \boxed{\ln e = 1}$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln x \ - 3\ln(2x-1)$$

หาอนุพันธ์เทียบ x ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{2}\ln x - 3\ln(2x-1)\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right) - (3)\frac{1}{(2x-1)}\frac{d(2x-1)}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{(2x-1)}(2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2x} - \frac{6}{(2x-1)}$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = y\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{6}{(2x-1)}\right)$$

จากโจทย์ $y = \dfrac{e^x\sqrt{x}}{(2x-1)^3}$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x\sqrt{x}}{(2x-1)^3}\left(1 + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{6}{(2x-1)}\right)$

ตัวอย่าง 2.45 กำหนดให้ $y = \dfrac{(\sin x)^{\cos x}}{\tan x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> ใส่ ln ทั้ง 2 ข้างของสมการ และใช้คุณสมบัติเบื้องต้นของลอการิทึม

$$\ln y = \ln \frac{(\sin x)^{\cos x}}{\tan x}$$

$$= \ln(\sin x)^{\cos x} - \ln(\tan x)$$

$$= \cos x \ln(\sin x) - \ln(\tan x)$$

หาอนุพันธ์เทียบ x ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left(\cos x \ln(\sin x) - \ln(\tan x)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\cos x \ln(\sin x) - \frac{d}{dx}\ln(\tan x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(\cos x \frac{d}{dx}(\ln(\sin x)) + \ln(\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)\right) - \frac{1}{\tan x}\frac{d(\tan x)}{dx}$$

$$= \cos x \frac{1}{\sin x}\frac{d(\sin x)}{dx} + \ln(\sin x)(-\sin x) - \frac{1}{\tan x}(\sec^2 x)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x}(\cos x) - \sin x \ln(\sin x) - \frac{\sec^2 x}{\tan x} \qquad \boxed{\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cot x \cos x - \sin x \ln(\sin x) - \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left(\cot x \cos x - \sin x \ln(\sin x) - \frac{\sec^2 x}{\tan x}\right)$$

จากโจทย์ $y = \dfrac{(\sin x)^{\cos x}}{\tan x}$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\sin x)^{\cos x}}{\tan x}\left(\cot x \cos x - \sin x \ln(\sin x) - \dfrac{\sec^2 x}{\tan x}\right)$

ตัวอย่าง 2.46 กำหนดให้ $y=\dfrac{\arctan x\ \ln x}{x^2}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> ใส่ ln ทั้ง 2 ข้างของสมการ และใช้คุณสมบัติเบื้องต้นของลอการิทึม

$$\ln y=\ln\left(\frac{\arctan x\ln x}{x^2}\right)$$

$$=\ln(\arctan x\ \ln x)-\ln x^2$$

$$=\ln(\arctan x)+\ln(\ln x)-\ln x^2$$

$$=\ln(\arctan x)+\ln(\ln x)-2\ln x$$

หาอนุพันธ์เทียบ x ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}\left(\ln(\arctan x)+\ln(\ln x)-2\ln x\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\arctan x}\frac{d(\arctan x)}{dx}+\frac{1}{\ln x}\frac{d(\ln x)}{dx}-2\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{\arctan x}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)+\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x}$$

$$=\frac{1}{(x^2+1)\arctan x}+\frac{1}{x\ln x}-\frac{2}{x}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=y\left(\frac{1}{(x^2+1)\arctan x}+\frac{1}{x\ln x}-\frac{2}{x}\right)$$

จากโจทย์ $y=\dfrac{\arctan x\ \ln x}{x^2}$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx}=\frac{\arctan x\ \ln x}{x^2}\left(\frac{1}{(x^2+1)\arctan x}+\frac{1}{x\ln x}-\frac{2}{x}\right)$$

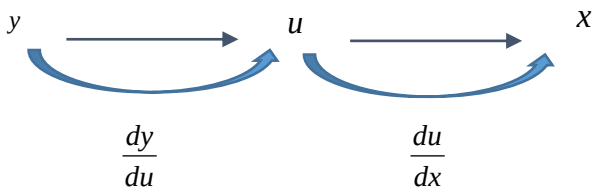
$$=\frac{\arctan x\ \ln x}{x^2(x^2+1)\arctan x}+\frac{\arctan x\ \ln x}{x^2x\ln x}-\frac{2\arctan x\ \ln x}{x^2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x^2(x^2+1)} + \frac{\arctan x}{x^2 x} - \frac{2\arctan x \ln x}{x^3}$$
$$= \frac{\ln x}{x^4+x^2} + \frac{\arctan x}{x^3} - \frac{2\arctan x \ln x}{x^3}$$
$$= \frac{\ln x}{x^4+x^2} + \frac{\arctan x - 2\arctan x \ln x}{x^3}$$

2.5 กฎลูกโซ่ (The chain rule)

ถ้าฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ และ $F = f \circ g$ เป็นฟังก์ชันประกอบ ซึ่งกำหนดโดย $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ แล้วฟังก์ชัน F หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $F'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$

ถ้ากำหนด $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ และ $\frac{dy}{dx}$ หาค่าได้ แล้ว



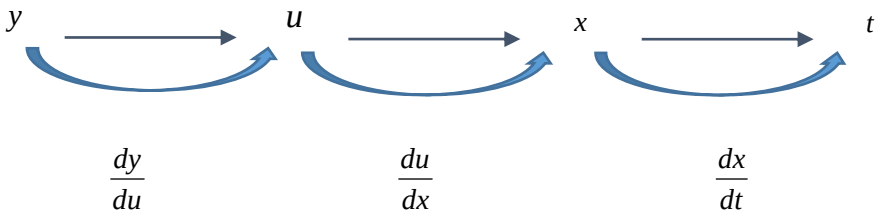
รูปที่ 2.4 ฟังก์ชันประกอบ

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

เป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันที่มากกว่า 2 ฟังก์ชันขึ้นไป โดยการเพิ่มกฎลูกโซ่ต่อ เพื่อหาอนุพันธ์ได้

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$$

เช่น ถ้ากำหนด $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ และ $x = h(t)$ ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว



รูปที่ 2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ 3 ฟังก์ชัน

ที่มา: วิกานดา สุภาสนันท์ (2564)

สามารถเขียนอยู่ในรูปอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้ คือ

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}}$$

ตัวอย่าง 2.47 กำหนดให้ $y = u^2 - 2u + 3$ และ $u = 2x + 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> จากกฎลูกโซ่ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

$$= \frac{d(u^2 - 2u + 3)}{du}\frac{d(2x+1)}{dx}$$

$$= (2u - 2)\cdot(2)$$

$$= 4u - 4 \qquad \text{จากโจทย์} \quad u = 2x + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4(2x+1) - 4$$

$$= 8x + 4 - 4$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 8x$

ตัวอย่าง 2.48 ถ้า $y = x^2$ และ $x = \sqrt{3t^2 + 1}$ จงหา $\frac{dy}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

<u>วิธีทำ</u> จากกฎลูกโซ่ $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(x^2)}{dx}\frac{d\sqrt{3t^2+1}}{dt}$$

$$= (2x)\frac{1}{2\sqrt{3t^2+1}}\frac{d(3t^2+1)}{dt}$$

$$= x\frac{1}{\sqrt{3t^2+1}}(6t)$$

$$= \frac{6xt}{\sqrt{3t^2+1}} \qquad \text{จากโจทย์} \quad x = \sqrt{3t^2+1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6(\sqrt{3t^2+1})t}{\sqrt{3t^2+1}}$$

$$= 6t$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 6(1)$$

$$= 6$$

ดังนั้น $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 6$

ตัวอย่าง 2.49 กำหนดให้ $y = \frac{u^2}{u^2+1}$ และ $u = \sin x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 0$

<u>วิธีทำ</u> จากกฎลูกโซ่ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

$$= \frac{d}{du}\left(\frac{u^2}{u^2+1}\right)\frac{d(\sin x)}{dx}$$

$$= \left(\frac{(u^2+1)\frac{d}{du}(u^2) - u^2\frac{d}{du}(u^2+1)}{(u^2+1)^2}\right)\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{(u^2+1)(2u) - u^2(2u)}{(u^2+1)^2}\right)\cos x$$ จากโจทย์ $u = \sin x$

$$= \left(\frac{((\sin x)^2+1)(2\sin x) - (\sin x)^2(2\sin x)}{((\sin x)^2+1)^2}\right)\cos x$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left(\frac{((\sin 0)^2+1)(2\sin 0) - (\sin 0)^2(2\sin 0)}{((\sin 0)^2+1)^2}\right)\cos 0$$

$$= \left(\frac{(0^2+1)(2(0)) - (0)^2(2(0))}{((0)^2+1)^2}\right)(1)$$

$$= \left(\frac{1(0)-0}{1}\right)(1) = \left(\frac{0}{1}\right)(1)$$

$\sin 0 = 0$

$\cos 0 = 1$

ดังนั้น $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$

ตัวอย่าง 2.50 กำหนดให้ $y = e^{\sqrt{u}}$, $u = \ln t$ และ $t = \arctan x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> จากกฎลูกโซ่ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dt}\dfrac{dt}{dx}$

$$= \frac{d(e^{\sqrt{u}})}{du}\frac{d(\ln t)}{dt}\frac{d(\arctan x)}{dx}$$

$$= e^{\sqrt{u}}\frac{d(\sqrt{u})}{du}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{1+x^2}$$

$$= e^{\sqrt{u}}\frac{1}{2\sqrt{u}}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{1+x^2} \qquad \text{จากโจทย์} \quad u = \ln t$$

$$= e^{\sqrt{\ln t}}\frac{1}{2\sqrt{\ln t}}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{1+x^2} \qquad \text{จากโจทย์} \quad t = \arctan x$$

$$= e^{\sqrt{\ln \arctan x}}\frac{1}{2\sqrt{\ln \arctan x}}\left(\frac{1}{\arctan x}\right)\frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{\ln \arctan x}}}{2(x^2+1)\sqrt{\ln \arctan x}\ \arctan x}$$

2.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit differentiation)

ถ้าฟังก์ชันหนึ่งที่เขียนอยู่ในรูปสมการโดยแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y โดยรวมกันอยู่ ไม่ได้แยกแสดงออกจากกันอย่างชัดเจน คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปแบบ $F(x, y) = 0$ เช่น $2xy^2 + xy - x + 5y - 2 = 0$ จะเรียกฟังก์ชันนี้ว่าฟังก์ชันไม่ชัดแจ้งหรือฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit function)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายนี้ ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของแต่ละพจน์ทั้งหมดที่อยู่ในสมการ โดยที่ y เป็นฟังก์ชันของ x แล้วจึงทำการแก้สมการทางคณิตศาสตร์โดยปกติทั่วไปเพื่อหาค่า $\dfrac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง 2.51 กำหนดให้ $xy^2 - 2xy + 5x - y = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด (1, 0)

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์เทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}(xy^2 - 2xy + 5x - y) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}(xy^2) - \frac{d}{dx}(2xy) + \frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(y) = 0$$

$$\left[x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x)\right] - 2\left[x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x)\right] + 5\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y) = 0$$

$$\left[x(2y)\frac{dy}{dx} + y^2\right] - 2\left[x\frac{dy}{dx} + y\right] + 5 - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy\frac{dy}{dx} + y^2 - 2x\frac{dy}{dx} - 2y + 5 - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -y^2 + 2y - 5$$

ดึงตัวร่วม $\frac{dy}{dx}$ จากด้านซ้ายมือของสมการ

$$\frac{dy}{dx}(2xy - 2x - 1) = -y^2 + 2y - 5$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 + 2y - 5}{2xy - 2x - 1}$$

$\frac{dy}{dx}$ ที่จุด (1, 0) คือ การแทนค่า $x = 1$ และ $y = 0$

ดังนั้น

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = \frac{-0^2 + 2(0) - 5}{2(1)(0) - 2(1) - 1}$$

$$= \frac{0 + 0 - 5}{0 - 2 - 1}$$

$$= \frac{-5}{-3}$$

$$= \frac{5}{3}$$

ตัวอย่าง 2.52 กำหนดให้ $\sqrt{x}y - \ln y - 1 = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด (4, 1)

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์เทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}y - \ln y - 1) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}y) - \frac{d}{dx}(\ln y) - \frac{d}{dx}(1) = 0$$

$$\left[\sqrt{x}\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(\sqrt{x})\right] - \frac{1}{y}\frac{d}{dx}(y) - 0 = 0$$

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + y\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(x) - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\sqrt{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2\sqrt{x}}$$

ดึงตัวร่วม $\frac{dy}{dx}$ จากด้านซ้ายมือของสมการ

$$\frac{dy}{dx}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{y}\right) = -\frac{y}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{y}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{y}\right)}$$

$\frac{dy}{dx}$ ที่จุด (4, 1) คือ การแทนค่า $x = 4$ และ $y = 1$

ดังนั้น

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{4}}}{\left(\sqrt{4} - \frac{1}{1}\right)}$$

$$= -\frac{\frac{1}{2(2)}}{(2-1)} = -\frac{\frac{1}{4}}{1}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

ตัวอย่าง 2.53 กำหนดให้ $e^x \cos y - e^y \sin x = 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์เทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}(e^x \cos y - e^y \sin x) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\left[e^x \frac{d}{dx}(\cos y) + \cos y \frac{d}{dx}(e^x)\right] - \left[e^y \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(e^y)\right] = 0$$

$$\left[e^x(-\sin y)\frac{d}{dx}(y) + \cos y(e^x)\right] - \left[e^y(\cos x) + \sin x e^y \frac{d}{dx}(y)\right] = 0$$

$$-e^x \sin y \frac{dy}{dx} + e^x \cos y - e^y \cos x - e^y \sin x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-e^x \sin y \frac{dy}{dx} - e^y \sin x \frac{dy}{dx} = -e^x \cos y + e^y \cos x$$

คูณลบตลอดทั้งสมการ

$$e^x \sin y \frac{dy}{dx} + e^y \sin x \frac{dy}{dx} = e^x \cos y - e^y \cos x$$

ดึงตัวร่วม $\frac{dy}{dx}$ จากด้านซ้ายมือของสมการ

$$\frac{dy}{dx}\left(e^x \sin y + e^y \sin x\right) = e^x \cos y - e^y \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cos y - e^y \cos x}{e^x \sin y + e^y \sin x}$$

ตัวอย่าง 2.54 กำหนดให้ $x^2 \sin(x+y) = \tan^{-1} x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์เทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin(x+y)\right) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$$

$$x^2 \frac{d}{dx}\left(\sin(x+y)\right) + \sin(x+y)\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x^2 \cos(x+y)\frac{d}{dx}(x+y) + \sin(x+y)2x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x^2\cos(x+y)\left[1+\frac{dy}{dx}\right]+2x\sin(x+y)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$x^2\cos(x+y)+x^2\cos(x+y)\frac{dy}{dx}+2x\sin(x+y)=\frac{1}{1+x^2}$$

ย้ายพจน์อื่นไปด้านขวามือทั้งหมด เพื่อหาค่า $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned}
x^2\cos(x+y)\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}-x^2\cos(x+y)-2x\sin(x+y)\\
&= \frac{1}{x^2\cos(x+y)}\left[\frac{1}{1+x^2}-x^2\cos(x+y)-2x\sin(x+y)\right]\\
&= \frac{1}{(1+x^2)x^2\cos(x+y)}-\frac{x^2\cos(x+y)}{x^2\cos(x+y)}-\frac{2x\sin(x+y)}{x^2\cos(x+y)}\\
&= \frac{1}{(x^3+x^2)\cos(x+y)}-1-\frac{2}{x}\left(\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sec(x+y)}{(x^3+x^2)}-1-\frac{2}{x}\tan(x+y)$$

ตัวอย่าง 2.55 กำหนดให้ $xe^y-y\sin(\ln x)=5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์เทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}\left(xe^y-y\sin(\ln x)\right)=\frac{d}{dx}(5)$$

$$\left(x\frac{d}{dx}(e^y)+e^y\right)-\left(y\frac{d}{dx}\sin(\ln x)+\sin(\ln x)\frac{d}{dx}(y)\right)=0$$

$$x(e^y)\frac{d}{dx}(y)+e^y-y\cos(\ln x)\frac{d}{dx}(\ln x)-\sin(\ln x)\frac{dy}{dx}=0$$

$$xe^y\frac{dy}{dx}+e^y-y\cos(\ln x)\frac{1}{x}-\sin(\ln x)\frac{dy}{dx}=0$$

$$xe^y\frac{dy}{dx}-\sin(\ln x)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cos(\ln x)-e^y$$

ดึงตัวร่วม $\frac{dy}{dx}$ จากด้านซ้ายมือของสมการ

$$\frac{dy}{dx}\left(xe^y - \sin(\ln x)\right) = \frac{y}{x}\cos(\ln x) - e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}\cos(\ln x) - e^y}{xe^y - \sin(\ln x)}$$

$$= \frac{1}{xe^y - \sin(\ln x)}\left[\frac{y}{x}\cos(\ln x) - e^y\right]$$

$$= \frac{y\cos(\ln x)}{x(xe^y - \sin(\ln x))} - \frac{e^y}{xe^y - \sin(\ln x)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y\cos(\ln x)}{x^2e^y - x\sin(\ln x)} - \frac{e^y}{xe^y - \sin(\ln x)}$$

2.7 อนุพันธ์อันดับสูง (Derivative of higher order)

ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ โดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง คือ y' หรือ $f'(x)$ โดยสามารถหาอนุพันธ์อันดับต่อไปเป็นอันดับที่สองได้ เขียนแทนด้วย

$$y'' \text{ หรือ } f''(x) \text{ หรือ } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ หรือ } \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

และอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่า ผลลัพธ์จากการหาอนุพันธ์ n ครั้ง เขียนแทนได้ด้วย

$$y^{(n)} \text{ หรือ } f^{(n)}(x) \text{ หรือ } \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} \text{ หรือ } \frac{d^{(n)}f(x)}{dx^{(n)}}$$

ตัวอย่าง 2.56 กำหนดให้ $y = 3x^4 + 5x^2 - 3x + 1$ จงหา y'''

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = 12x^3 + 10x - 3$$

$$y'' = 36x^2 + 10$$

$$y''' = 72x$$

ตัวอย่าง 2.57 กำหนดให้ $y = x\ln x + \log x$ จงหา y''

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = \left(x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(x) \right) + \frac{1}{x}\log e\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}(x) + \ln x + \frac{1}{x}\log e$$

$$= 1 + \ln x + \frac{\log e}{x}$$

$$= x^{-1}\log e + \ln x + 1$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\log e + \ln x + 1\right)$$

$$= (-1)x^{-2}\log e + \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\log e}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{\log e}{x^2}$$

ตัวอย่าง 2.58 กำหนดให้ $x^2 + xy - y^2 + 5 = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ณ จุด $(-1,-1)$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบ x ของแต่ละพจน์

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + xy - y^2 + 5\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x + x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x) - 2y\frac{d}{dx}(y) = 0$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

ดึงตัวร่วม $\frac{dy}{dx}$ จากด้านซ้ายมือของสมการ

$$\frac{dy}{dx}(x-2y)=-2x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y}{x-2y}$$

$\frac{dy}{dx}$ ณ จุด $(-1,-1)$ คือ การแทนค่า $x=-1$ และ $y=-1$

ดังนั้น
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,-1)}=\frac{-2(-1)-(-1)}{(-1)-2(-1)}$$

$$=\frac{2+1}{(-1)+2}$$

$$=3$$

หาอนุพันธ์อันดับสองเทียบ x

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x-2y)\frac{d}{dx}(-2x-y)-(-2x-y)\frac{d}{dx}(x-2y)}{(x-2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x-2y)(-2-\frac{dy}{dx})-(-2x-y)(1-2\frac{dy}{dx})}{(x-2y)^2}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่จุด $(-1,-1)$ คือ การแทนค่า $x=-1$, $y=-1$ และ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,-1)}=3$

ดังนั้น
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(-1,-1)}=\frac{\big((-1)-2(-1)\big)(-2-3)-\big(-2(-1)-(-1)\big)\big(1-2(3)\big)}{\big((-1)-2(-1)\big)^2}$$

$$=\frac{(-1+2)(-5)-(2+1)(1-6)}{(-1+2)^2}$$

$$=\frac{1(-5)-3(-5)}{(1)^2}$$

$$=\frac{-5+15}{1}$$

$$=10$$

ตัวอย่าง 2.59 กำหนดให้ $y = e^x - x^{-1}$ จงหา $y^{(n)}$

<u>วิธีทำ</u>

$$y' = e^x - (-1)x^{-1-1}$$

$$= e^x + x^{-2}$$

$$y'' = e^x + (-2)x^{-2-1}$$

$$= e^x - 2x^{-3}$$

$$y''' = e^x - 2(-3)x^{-3-1}$$

$$= e^x + 6x^{-4}$$

$$y^{(4)} = e^x + 6(-4)x^{-4-1}$$

$$= e^x - 24x^{-5}$$

$$\vdots$$

เขียนให้อยู่ในรูปลำดับ n

เมื่อกำหนดให้ $n = 1$ ของอนุพันธ์อันดับที่ 1

$$y' = e^x + x^{-2} = e^x + (-1)^{1+1}\ (1)x^{-1-1}$$

เมื่อกำหนดให้ $n = 2$ ของอนุพันธ์อันดับที่ 2

$$y'' = e^x - 2x^{-3} = e^x + (-1)^{2+1}\ (1\times 2)x^{-2-1}$$

เมื่อกำหนดให้ $n = 3$ ของอนุพันธ์อันดับที่ 3

$$y''' = e^x + 6x^{-4} = e^x + (-1)^{3+1}\ (1\times 2\times 3)x^{-3-1}$$

เมื่อกำหนดให้ $n = 4$ ของอนุพันธ์อันดับที่ 4

$$y^{(4)} = e^x - 24x^{-5} = e^x + (-1)^{4+1}\ (1\times 2\times 3\times 4)x^{-4-1}$$

$$\vdots$$

ดังนั้น $y^{(n)} = e^x + (-1)^{n+1}\ n!x^{-(n+1)}$ โดยที่ $n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$

ในการหลักการทางฟิสิกส์ ถ้า $s = f(t)$ เป็นฟังก์ชันระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ในเวลา t การหาความเร็ว v จะได้จากอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ s เมื่อเทียบกับ t หรือ $v = \frac{ds}{dt}$ และการหาความเร่ง a ของวัตถุที่เวลา t จะได้จากอนุพันธ์อันดับที่ 2 คือ $a = \frac{d^2s}{dt^2}$

ตัวอย่าง 2.60 ถ้ากล่องใบหนึ่งถูกลากให้เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 10t$ จงหาความเร่ง a ณ จุดที่ความเร็ว $v = 0$

<u>วิธีทำ</u> ความเร็ว $v = \frac{ds}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 10t\right)$$

$$= \frac{1}{3}(3)t^{3-1} - \frac{3}{2}(2)t^{2-1} - 10$$

$$= t^2 - 3t - 10$$

ณ จุดที่ความเร็ว $v = 0$

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t-5)(t+2) = 0$$

$$t = -2,5$$

ความเร่ง $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}\left(t^2 - 3t - 10\right)$$

$$\therefore\ a = 2t - 3$$

เมื่อ $t = -2$ $\quad \therefore a = 2(-2) - 3 = -4 - 3 = -7$

เมื่อ $t = 5$ $\quad \therefore a = 2(5) - 3 = 10 - 3 = 7$

ดังนั้น ความเร่ง a ณ จุดที่ความเร็ว $v = 0$ คือ $-7,7$

บทสรุป

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันสามารถหาได้โดยใช้บทนิยามของอนุพันธ์ เพื่อหาอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันที่มีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นอยู่เสมอ ทั้งยังมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย อนุพันธ์เชิงลอการิทึม กฎลูกโซ่ หรืออนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย และอนุพันธ์อันดับสูง ซึ่งจะมีทฤษฎีบทของการหาอนุพันธ์ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน รวมทั้งการจัดผลเฉลยให้อยู่ในรูปที่ถูกต้อง

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x) = -5x + 3$

1.2 $f(x) = 2x^2 - 5$

1.3 $f(x) = x^2 + x - 3$

1.4 $f(x) = 7 - \sqrt{x}$

1.5 $f(x) = x(x+3)$

1.6 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1.7 $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

1.8 $f(x) = \dfrac{5-x}{x}$

1.9 $f(x) = (x-3)^2$

1.10 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

1.11 $f(x) = -x^2 + 3$

1.12 $f(x) = x(x+1)(x+2)$

1.13 $f(x) = 2x^2 - x + 7$

1.14 $f(x) = x\sqrt{x} + 1$

1.15 $f(x) = x^2(x+3)$

1.16 $f(x) = \dfrac{5}{x}$

1.17 กำหนดให้ $f(x) = x + 3$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(3)$

1.18 กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 + x + 1$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(3)$

1.19 กำหนดให้ $f(x)=\frac{1}{x}-x$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(1)$

1.20 กำหนดให้ $f(x)=(1-x)^2$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(2)$

1.21 กำหนดให้ $f(x)=\frac{x}{1-x}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(-1)$

1.22 กำหนดให้ $f(x)=x\sqrt{x}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(1)$

1.23 กำหนดให้ $f(x)=(x-5)(x-7)$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(4)$

1.24 กำหนดให้ $f(x)=x(x^2+3)$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

1.25 กำหนดให้ $f(x)=\frac{1-x^2}{x}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(1)$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $f(x)=(2-7x)^5$

2.2 $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

2.3 $f(x)=\sqrt[3]{3x^2-4}$

2.4 $f(x)=\left(\frac{1}{3x-2}\right)^4$

2.5 $f(x)=(x^2+1)(5x-2)$

2.6 $f(x)=(x^2-3)^2(3x+2)$

2.7 $f(x)=(3x-2)(x+2)(x-7)$

2.8 $f(x)=\frac{7x+1}{x^2-3}$

2.9 $f(x)=\left(\frac{x+7}{8-3x}\right)^3$

2.10 กำหนดให้ $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4x-1}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

2.11 กำหนดให้ $f(x)=(x-8)^{-2}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(9)$

2.12 กำหนดให้ $f(x)=(3x+2)(x^2-3)$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

2.13 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x^2-4}{6}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(9)$

2.14 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x+3}{1-3x}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

2.15 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{3-x^3}{9-x^2}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $y=e^{e^x}$

3.2 $y=6^{6^x}$

3.3 $y=x\log x$

3.4 $y=5^{x^3}e^{2x}$

3.5 $y=(x^2-3)^{(x^2-3)}$

3.6 $y=5^{\log x}\,e^x$

3.7 $y=\ln(\log x)$

3.8 $y=x\log\sqrt{x-1}$

3.9 $y=2^{\ln x}e^{x^2}$

3.10 $y=e^{(x\log x)}$

3.11 กำหนดให้ $f(x)=\ln(\ln(5x-2))$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(1)$

3.12 กำหนดให้ $f(x)=\log_3(3x^2-1)^5$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

3.13 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1-e^x}{e^{2x}+2}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

3.14 กำหนดให้ $f(x)=\log\dfrac{x(x-3)^2}{x+1}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(1)$

3.15 กำหนดให้ $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(2)$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1 $y=\sin x^2-2\tan x^2$

4.2 $y=e^{\log(\sin x)}+\log^2(\cos x)$

4.3 $y=\cos^3\left(\dfrac{x}{6}\right)+\cos\left(\dfrac{x}{6}\right)$

4.4 $y=\sqrt{\sin x-\cos x}$

4.5 $y = \cos(\tan\sqrt{\cos x})$

4.6 $y = (1-\tan^2 x)^4$

4.7 $y = \dfrac{\sec x}{2x}$

4.8 $y = \operatorname{cosec}^2(\cos x)$

4.9 $y = 5^{\ln(\sin x)}$

4.10 $y = \tan\sqrt{1-\sin x}$

4.11 $y = 2\sin x + x^2\cos^3 x$

4.12 $y = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

4.13 กำหนดให้ $f(x) = \ln(\sin^2 3x)$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

4.14 กำหนดให้ $f(x) = x\cos(e^{2x}-1)$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

4.15 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{\cos x}{2\sin x - 1}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f'(0)$

5. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

5.1 $y = \sin^{-1}(e^{2x})$

5.2 $f(x) = \arccos(\sin x)$

5.3 $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

5.4 $f(x) = (\cot^{-1}\sqrt{x})^4$

5.5 $y = e^{\operatorname{arcsec} 2x}$

5.6 $f(x) = x^3\ \tan^{-1}(\ln x)$

5.7 $y = \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5.8 $f(x) = \sec^{-1} x\ \operatorname{cosec}^{-1} x$

5.9 $y = \log x\ \tan^{-1} x$

5.10 $f(x) = \dfrac{\cot^{-1} x}{\sqrt{x}}$

5.11 $y = \ln\left(\sin^{-1}(\tan x)\right)$

5.12 $f(x) = \dfrac{\tan^{-1} x}{x}$

5.13 $y = \sqrt{x}\ \cot^{-1} x$

5.14 กำหนดให้ $f(x) = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ จงหา $f'(1)$

5.15 กำหนดให้ $f(x) = x + \cos^{-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)$ จงหา $f'(0)$

6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

6.1 $y = \dfrac{(5x-1)^4\sqrt{x-7}}{\sqrt[3]{x}(2x+9)^5}$

6.2 $y = (2x^3+4)^3\sqrt{4x^4+4}\,\sqrt[3]{1-x^3}$

6.3 $y = \dfrac{e^x \sin x}{x^x}$

6.4 $y = \dfrac{\sin^{-1} x \cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

6.5 $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

6.6 $y = x^2 e^{3x} \tan^3 x$

6.7 $y = \dfrac{x^2 \cos 5x}{(x^2+1)^3(x-1)^2}$

6.8 $y = \dfrac{x^4 \sin^2 x}{\sqrt{x+1}}$

7. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

7.1 กำหนดให้ $y = t^2 + 3t - 1$ และ $t = x^2 + 3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 1$

7.2 กำหนดให้ $y = u^2$ และ $u = \frac{1-x}{x+1}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 0$

7.3 กำหนดให้ $y = \ln x$ และ $x = e^t$ จงหา $\frac{dy}{dt}$

7.4 กำหนดให้ $y = \frac{x^2+1}{1-x^2}$ และ $x = \sqrt{t}$ จงหา $\frac{dy}{dt}$

7.5 กำหนดให้ $y = 3u^2 + 2$ และ $u = \frac{1}{x-1}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

7.6 กำหนดให้ $y = \frac{u-1}{u+1}$ และ $u = x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 2$

7.7 กำหนดให้ $y = \frac{u+2}{u-1}$, $u = (3s-1)^2$ และ $s = 1 - 2t^3$ จงหา $\frac{dy}{dt}$ เมื่อ $t = -1$

7.8 กำหนดให้ $y = u^3 - u^2$ และ $u = 4x^2 + x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 3$

7.9 กำหนดให้ $y = \sqrt{u}$, $u = v(3-2v)$ และ $v = x^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = -1$

8. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

8.1 กำหนดให้ $xy - y + 2x + 5 = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

8.2 กำหนดให้ $xy^2 + x^2y - x^2 + y^2 = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

8.3 กำหนดให้ $x\sin y - \tan^{-1} x = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $(x, y) = (1, 0)$

8.4 กำหนดให้ $e^y \cos x - ye^x = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $(x, y) = (0, 1)$

8.5 กำหนดให้ $x\ln y - \cos y = 0$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $(x, y) = (1, 1)$

9. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

9.1 กำหนดให้ $y = x^2 - \sqrt{x+1}$ จงหา y''

9.2 กำหนดให้ $f(x) = (x^2 + 1)^3$ จงหา $f^{(4)}(x)$

9.3 กำหนดให้ $r(t) = 5t^{\frac{1}{2}} - e^{2t}$ จงหา $r'''(t)$

9.4 กำหนดให้ $u(x) = \cos 2x - \ln 5x$ จงหา $u''(x)$

9.5 กำหนดให้ $y = x\sin x - 3x^2$ จงหา $y''(x)$

9.6 กำหนดให้ $y = \sin^2 x - x + 1$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่ $x = 0$

9.7 กำหนดให้ $x^2 + xy - y^2 = 0$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ที่ $x = 0$

9.8 จงหา $f^{(12)}(x)$ เมื่อ $f(x) = \sin x$

9.9 จงหา $f^{(n)}(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{1}{2x-1}$

9.10 จงหา $f^{(n)}(x)$ เมื่อ $f(x) = xe^x$

เอกสารอ้างอิง

กฤษณะ เนียมมณี. (2543). **แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ I**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

จินดา อาจริยะกุล. (2545). **อนุพันธ์และการประยุกต์**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ (2547). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2558). **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร**. (พิมพ์ครั้งที่ 3). ปทุมธานี: สกายบุ๊กส์.

นวลอนงค์ ตันตระกูล. (2543). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. กรุงเทพมหานคร: ว.เพ็ชรสกุล.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

สุวรรณ ถังมณี และบุษราพร เหลืองมาลาวัฒน์. (2558). **แคลคูลัสเบื้องต้นสำหรับผู้เริ่มเรียน**. (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1**. (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

อังสนา จั่นแดง และวิภาวรรณ สิงห์พริ้ง. (2545). **แคลคูลัส 1**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

อำพล ธรรมเจริญ. (2547). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 1**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). **Calculus for Scientists and Engineers.** (1st ed.). USA: Pearson Education, Inc.